Soluzioni prova scritta 26/02/2019

Innanzitutto, questa è la suddivisione approssimativa del punteggio per i vari esercizi, con una descrizione sintetica, da intendersi solo indicativamente.

Esercizio 1

- E' un processo esponenziale (progressione geometrica).
- Sa formula errore di un prodotto.
- Ricava la formula in funzione di n .
- Imposta l'equazione.
- La risolve.

Esercizio 2

- Si accorge della corretta media pesata.
 - Conclude.

Esercizio 3

- Fa il ragionamento per cui il rango di A è 2.
- Sa Rouché-Capelli.
- Sceglie un minore 2×2 opportuno e sa che può scartare le equazioni fuori dalle righe corrispondenti, e che può portare al secondo membro le variabili fuori dalle colonne corrispondenti.
- Sa concludere la risoluzione (invertendo la matrice 2×2 o risolvendo a mano).
- Ok con la definizione di minore e con le combinazioni.

Esercizio 4

- Limiti agli estremi e asintoti orizzontali.
- Segno e intersezione con gli assi.
- Pari/dispari.
- Continuità.
- Deduce che non ci sono asintoti verticali né obliqui.

(→)

- Massimi e minimi relativi.
- Grafico.
- Equazione retta tangente in $x = 2$.

Esercizio 5

- a)
- b)
- c)

Esercizio 6

- Individua correttamente la regione di piano.
- Trova l'ascissa del punto di intersezione che serve.
- Calcola l'area (tramite un opportuno integrale) in funzione di m .
- Impone l'equazione e la risolve in m .

Seguono delle soluzioni più o meno dettagliate dei vari esercizi.

Esercizio 1. In un certo ecosistema un virus si diffonde tra gli esemplari di una certa specie. Secondo un semplice modello epidemiologico, ogni giorno il numero di esemplari infetti aumenta del $(5 \pm 1)\%$. Nel momento in cui si esamina l'ecosistema, si valuta che ci sono circa $10^5 \pm 100$ esemplari infetti. Dopo quanti giorni il modello non permette di trarre alcuna conclusione sull'infezione in base ai dati raccolti? (In altre parole, dopo quanti giorni si avrà un errore relativo stimato del 100%?)

Soluzione. Sia a_0 la popolazione infetta iniziale e Δa_0 l'incertezza (errore) con cui è stata misurata. Ogni giorno la popolazione infetta, che era il 100% di se stessa (con incertezza nulla) aumenta del 5% (con incertezza del 1%), cioè viene moltiplicata per un fattore $\lambda = 105\%$ (con incertezza $\Delta\lambda$ sempre del 1%). Quindi abbiamo

$$a_0 = 10^5, \Delta a_0 = 10^2, \lambda = 105\% = 1,05, \Delta\lambda = 1\% = 0,01 .$$

La popolazione infetta al giorno n è quindi espressa ricorsivamente da $a_n = \lambda \cdot a_{n-1}$, ovvero esplicitamente da $a_n = \lambda^n \cdot a_0$, con un'incertezza $\Delta(a_n)$ che andremo a determinare. Invece che con l'incertezza assoluta ci conviene lavorare con l'incertezza relativa, che indichiamo con $\text{Er}(\dots)$. Quindi abbiamo

$$\text{Er}(a_0) = \frac{\Delta a_0}{a_0}, \quad \text{Er}(\lambda) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} .$$

Ricordiamo la formula (approssimata) per l'incertezza *relativa* di un prodotto di grandezze x ed y :

$$\text{Er}(x \cdot y) = \text{Er}(x) + \text{Er}(y) .$$

Prendendo $x = \lambda$ ed $y = a_{n-1}$, si ha

$$\text{Er}(a_n) = \text{Er}(\lambda \cdot a_{n-1}) = \text{Er}(\lambda) + \text{Er}(a_{n-1})$$

da cui si vede facilmente che, ogni volta che n aumenta di una unità ($n - 1 \rightarrow n$), $\text{Er}(a_n)$ aumenta di $\text{Er}(\lambda)$ (oppure si ragiona induttivamente, o si risolve la ricorsione che ora è una progressione aritmetica di passo $\text{Er}(\lambda)$), cioè:

$$\begin{aligned} \text{Er}(a_n) &= \text{Er}(a_0) + n \cdot \text{Er}(\lambda) \\ &= \frac{\Delta a_0}{a_0} + n \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} . \end{aligned}$$

Ora vogliamo determinare il più piccolo numero n di giorni per cui $\text{Er}(a_n) \geq 100\% = 1$, quindi imponiamo

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} + n \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1$$

da cui si trova

$$n = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \left(1 - \frac{\Delta a_0}{a_0}\right) \approx 105 \text{ giorni} .$$

Esercizio2. Si vuole campionare la lunghezza delle corna di una certa specie di cervo in una riserva naturale. La riserva è suddivisa in due zone, in cui vivono rispettivamente il 40% e il 60% degli esemplari. Nella prima zona i cervi hanno corna mediamente di 70cm, e nella seconda mediamente di 80cm. Qual è la lunghezza media delle corna dei cervi della riserva?

Soluzione. E' più o meno intuitivo che la risposta sia data dalla media pesata

$$\frac{40 \cdot 70\text{cm} + 60 \cdot 80\text{cm}}{100} = 76\text{cm}.$$

Una giustificazione più rigorosa (non necessaria per l'esame) si poteva avere come segue. Siano A, B le due zone, N_A, N_B i rispettivi numeri di individui, ed ℓ_A, ℓ_B le rispettive lunghezze medie. Se $a_1, \dots, a_{N_A}$ sono le lunghezze delle corna degli esemplari nella zona A e $b_1, \dots, b_{N_B}$ quelli nella zona B , si ha

$$\ell_A = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} a_i}{N_A}, \quad \ell_B = \frac{\sum_{j=1}^{N_B} b_j}{N_B}$$

e quindi la media globale è data da

$$\begin{aligned} \ell_{\text{media}} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_A} a_i + \sum_{j=1}^{N_B} b_j}{N_A + N_B} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N_A} a_i}{N_A + N_B} \cdot \frac{N_A}{N_A} + \frac{\sum_{j=1}^{N_B} b_j}{N_A + N_B} \cdot \frac{N_B}{N_B} \\ &= \left(\frac{N_A}{N_A + N_B} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_A} a_i}{N_A} \right) + \left(\frac{N_B}{N_A + N_B} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_B} b_j}{N_B} \right) \\ &= 40\% \cdot \ell_A + 60\% \cdot \ell_B. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Dire se il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 + 28 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 - x_5 + 5x_6 + 35 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 7x_4 - 8x_5 + 40x_6 + 42 = 0 \\ 9x_1 + 10x_2 + 18x_3 - 9x_4 - 10x_5 + 50x_6 + 56 = 0 \end{cases}$$

nelle variabili $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ha soluzione, sapendo che il rango della matrice completa del sistema è uguale a 2. Se sì, si determinino tutte le soluzioni del sistema.

Quanti sono i minori 4×4 della matrice completa? Quanti sono i suoi minori 2×2 ?

Soluzione. Scriviamo la matrice completa del sistema:

$$[A | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -28 \\ 3 & 1 & 6 & -3 & -1 & 5 & -35 \\ 7 & 8 & 14 & -7 & -8 & 40 & -42 \\ 9 & 10 & 18 & -9 & -10 & 50 & -56 \end{array} \right]$$

dove A è la matrice del sistema omogeneo associato e $\mathbf{b}$ il vettore colonna dei termini noti (portati all'altro membro di ciascuna equazione). Osserviamo che il minore 2×2 in alto a sinistra, vale a dire

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ha determinante

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2 \neq 0.$$

Questo ci dice che la matrice A ha rango ≥ 2 .

D'altra parte, il rango di A non può superare quello di $[A \mid \mathbf{b}]$ (perché A è una sottomatrice di $[A \mid \mathbf{b}]$), e sappiamo dal testo dell'esercizio che il rango di $[A \mid \mathbf{b}]$ è uguale a 2. Questo ci dice che A ha rango esattamente uguale a 2.

Quindi A e $[A \mid \mathbf{b}]$ hanno lo stesso rango (cioè 2), quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette almeno una soluzione.

Determiniamo tale soluzione. Ci aspettiamo che le soluzioni dipendano da $6 - 2 = 4$ parametri liberi (numero di variabili meno rango).

Scartiamo le equazioni che non corrispondono a righe che figurano nel minore M scelto, ottenendo il seguente sistema (equivalente a quello iniziale per ragioni che non abbiamo visto a lezione)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 + 28 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 - x_5 + 5x_6 + 35 = 0 \end{cases}$$

e portiamo a secondo membro le variabili che non corrispondono alle colonne che figurano in M (tali variabili verranno considerate come dei parametri liberi):

$$\begin{cases} 2x_1 = -4x_3 + 2x_4 - 28 \\ 3x_1 + x_2 = -6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35. \end{cases}$$

Ora possiamo risolvere per x_1 (in funzione dei parametri liberi) dalla prima equazione

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-4x_3 + 2x_4 - 28) \\ x_2 = -3x_1 - 6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35. \end{cases}$$

e sostituire nella seconda equazione, ottenendo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-4x_3 + 2x_4 - 28) \\ x_2 = -3 \cdot \frac{1}{2}(-4x_3 + 2x_4 - 28) - 6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35. \end{cases}$$

Queste sono quindi le soluzioni del sistema: tutte le sestuple $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ tali che x_3, x_4, x_5, x_6 sono numeri reali (parametri) arbitrari ed x_1, x_2 sono determinati in funzione dei parametri dalle due ultime uguaglianze qui sopra.

Al momento di risolvere il sistema 2×2 con parametri, invece che farlo a mano si poteva anche notare che era equivalente al sistema scritto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 + 2x_4 - 28 \\ -6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35 \end{bmatrix}$$

invertire la matrice che c'è al primo membro (che ovviamente è il minore M stesso)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenendo la soluzione in forma matriciale

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -4x_3 + 2x_4 - 28 \\ -6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4x_3 + 2x_4 - 28 \\ -6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (-4x_3 + 2x_4 - 28) + 0 \cdot (-6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35) \\ -\frac{3}{2} \cdot (-4x_3 + 2x_4 - 28) + 1 \cdot (-6x_3 + 3x_4 + x_5 - 5x_6 - 35) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

equivalente a quella ottenuta prima.

Rispondiamo ora alle due domande di tipo combinatorio. Un minore $m \times m$ di una matrice è per definizione una matrice che si ottiene scartando alcune righe arbitrarie e (poi) alcune colonne arbitrarie della matrice di partenza, finché non si rimane con m righe ed m colonne. Per individuare un minore bisogna quindi determinare quali righe tenere e quali colonne tenere. Nel caso di una matrice con 4 righe e 7 colonne, un minore 4×4 è quindi univocamente individuato dalle 4 colonne che si sceglie di tenere sul totale delle 7 colonne (in questo caso non si possono scartare righe, perché le righe sono già 4). Si tratta quindi di combinazioni di 4 elementi su 7, date dal coefficiente binomiale:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = 35$$

modi per scegliere tali colonne. Osserviamo che, se la matrice avesse alcune entrate (alcuni numeri che la compongono) tra loro uguali, alcuni dei minori così ottenuti potrebbero anche risultare uguali (sebbene ottenuti scegliendo insiemi diversi di colonne). Esempio banale: la matrice 3×11

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

pur essendo molto grande, ha esattamente due minori 2×2 effettivamente distinti, cioè

$$\text{questo } \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \text{ e questo } \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nel nostro caso, però, la matrice 4×7 ha tutte le entrate distinte (a parte tre zeri sulla stessa riga, ma si vede che questo non complica la faccenda), quindi i minori 4×4 effettivamente distinti sono effettivamente 35.

Quanti sono i minori 2×2 ? Ora si devono scegliere 2 righe su 4 in totale e, indipendentemente, 2 colonne su 7 in totale. Ragionando come prima, si ha che i minori 2×2 (effettivamente distinti) sono

$$\binom{4}{2} \times \binom{7}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 126.$$

Nell'esame non era necessario rispondere in modo così lungo alle domande combinatorie, bastava scrivere i risultati giusti in termini dei coefficienti binomiali.

Esercizio 4. Si effettui uno studio della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che comprenda i seguenti punti: a) Limiti agli estremi del dominio, b) Segno della funzione e intersezione del suo grafico con gli assi cartesiani, c) Simmetrie (parità/disparità), d) Continuità, e) Eventuali asintoti orizzontali, verticali, e obliqui, f) Massimi e minimi relativi e assoluti.

Si tracci infine un grafico approssimativo della funzione, e si scriva l'equazione della tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 2$.

Soluzione. Non serve “trovare il dominio” della funzione: il dominio è già assegnato nell'esercizio!

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{1+x^2} = 0$$

per cui la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale (destro e sinistro). Pertanto non ci sono asintoti obliqui.

Si vede facilmente che la funzione $f(x)$, che ha un valore assoluto al numeratore (sempre ≥ 0 e che si annulla solo per $x = 0$) e una quantità sempre strettamente positiva al denominatore, verifica sempre $f(x) \geq 0$ ed $f(x) = 0$ solo per $x = 0$. Pertanto l'origine è l'unico punto di intersezione del grafico con ciascuno degli assi cartesiani.

La funzione è pari:

$$f(-x) = \frac{|-x|}{1+(-x)^2} = \frac{|x|}{1+x^2} = f(x).$$

La funzione è continua sul suo dominio perché combinazione di funzioni elementari continue, o perché rapporto di funzioni continue, o perché $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ per ogni a .

Essendo f continua su tutto l'asse reale, non può avere asintoti verticali.

Osserviamo che funzione è descrivibile a tratti tramite:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{-x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

e che per $x \neq 0$ è derivabile con derivata data da

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, & x > 0 \\ \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

(mentre *non* è derivabile in $x = 0$, ma quest'ultima osservazione non è necessaria per svolgere lo studio dei massimi e minimi).

Considerando che f è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, possiamo effettuare uno studio del segno e degli zeri di f' dove è derivabile e poi combinare l'informazione ottenuta sui vari intervalli, applicando il criterio per massimi e minimi relativi (vedi il “Syllabus Pragmatico”). Lo studio di segno e zeri (suddividendo il caso $x > 0$ e il caso $x < 0$) ci dà che $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $f(1) = 0$, $f'(x) < 0$ per $x > 1$.

Questo ci dice che $x = -1$ ed $x = +1$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di minimo relativo, e non ci sono altri estremi relativi. Combinando questo col segno di f e con l'informazione sulla sua (de)crescenza che deriva dallo studio della derivata, possiamo concludere che i punti $x = \pm 1$ sono di massimo *assoluto* e che il punto $x = 0$ è di minimo *assoluto*. Per tracciare bene il grafico di f nel punto di non derivabilità ($x = 0$) uno potrebbe per esempio osservare che la derivata per $x \rightarrow 0^-$ si avvicina a -1 , mentre per $x \rightarrow 0^+$ si avvicina a $+1$. L'origine è un cosiddetto "punto angoloso" del grafico. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = 2$ (che è un punto in cui f è derivabile) è data da

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

cioè

$$y = \frac{1 - 2^2}{(1 + 2^2)^2} \cdot (x - 2) + \frac{2}{1 + 2^2}$$

cioè

$$y = -\frac{3}{25} \cdot (x - 2) + \frac{2}{5}.$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x + 3}{\log(3x^2) + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^{|x|}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^{|x|}}$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x + 3}{\log(3x^2) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x + 3}{2 \log(x) + \log(3) + 1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^{|x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^x} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$$

avendo usato che $e^{-x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x^3 \prec x^5 \prec e^x$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^{|x|}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^5 + 2e^{-x}}{x^3 + 4e^x + e^{-x}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y} - y^5 + 2e^y}{-y^3 + 4e^{-y} + e^y} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Si consideri la regione limitata $\mathcal{A}$ di piano cartesiano delimitata dalla curva $y = x - x^2$ e dalla retta $y = mx$, dove m è un parametro tale che $0 < m < 1$. Si determini il valore di m per cui l'area di $\mathcal{A}$ è uguale a metà dell'area della regione limitata di piano determinata dalla curva $y = x - x^2$ (la stessa di prima) e l'asse delle x .

Soluzione. La retta e la curva (che è una parabola) si intersecano nell'origine e in un altro punto di cui ora determineremo l'ascissa. Si risolve il sistema

$$\begin{cases} y = x - x^2 \\ y = mx \end{cases}$$

trovando $x = 1 - m$ (il valore di y non importa). L'area richiesta, in funzione di m è data da

$$\begin{aligned} A(m) &= \int_0^{1-m} [(x - x^2) - mx] dx = \int_0^{1-m} [(1 - m)x - x^2] dx \\ &= (1 - m) \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-m} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-m} \\ &= \frac{1}{2}(1 - m)^3 - \frac{1}{3}(1 - m)^3 = \frac{1}{6}(1 - m)^3 . \end{aligned}$$

L'area delimitata dalla parabola e dall'asse x corrisponde al caso in cui la retta $y = mx$ ha coefficiente angolare zero: $A(0) = 1/6$. La condizione che dobbiamo imporre è quindi

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot A(0) = \frac{1}{12}$$

cioè

$$\frac{1}{6}(1 - m)^3 = \frac{1}{12}$$

che si risolve facilmente e dà l'unica soluzione

$$m = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} .$$