

Syllabus pragmatico

20/02/2019

Questo documento costituisce un elenco di quel sottoinsieme degli argomenti, svolti a lezione, che hanno maggiore rilevanza ai fini della prova scritta. Ogni punto di questo elenco è corredato da una più o meno sintetica descrizione (la cui lunghezza non è correlata all'importanza dell'argomento ai fini dell'esame). Questo documento non è da intendersi come un insieme completo di note del corso, bensì come un aiuto per orientarsi nello studio e nel ripasso.

I punti marcati con • sono da considerarsi più importanti e/o basilari ai fini del corso, mentre i punti marcati con ◦ sono da considerarsi più secondari. Ma ciò non implica che un argomento ◦ non possa figurare in una parte di un esercizio della prova scritta.

Grandezze, unità di misura, errori di misurazione

- Il concetto di grandezza fisica e unità di misura; sapere che non sono la stessa cosa.
- La notazione scientifica (con le potenze positive o negative di dieci $10^{\pm n}$)
- Alcuni prefissi standard del sistema metrico: deca- *da*..., etto- *h*..., kilo- *K*..., mega- *M*..., Giga- *G*..., Tera- *T*..., deci- *d*..., centi- *c*..., milli- *m*..., micro- μ ..., nano- *n*..., pico- *p*....
- Errore di misurazione assoluto Δa e relativo $\frac{\Delta a}{a}$ su una grandezza *a* che viene misurata.
- La notazione $a \pm \Delta a$ per indicare una misurazione con errore.
 1. Interpretazione di $a \pm \Delta a$ come errore strumentale: una sola misurazione che dà risultato *a*, effettuata con uno strumento che ha incertezza strumentale Δa .

Formula (approssimata) per l'errore «strumentale» di un prodotto $a \cdot b$ di due grandezze (che assumiamo positive):

$$\Delta(a \cdot b) \approx b\Delta a + a\Delta b \quad (\text{assoluto})$$

$$\frac{\Delta(a \cdot b)}{a \cdot b} \approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad (\text{relativo})$$

e del loro rapporto

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2} \quad (\text{assoluto})$$

$$\frac{\Delta(a/b)}{a/b} \approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad (\text{relativo})$$

(Sì, la formula dell'errore relativo è la stessa per prodotto e rapporto. E no, la formula dell'errore assoluto su un rapporto non ha il segno meno come accade con l'analoga formula per la derivata di un rapporto).

2. Interpretazione statistica di $a \pm \Delta a$: vengono effettuate molte misurazioni, la loro media è a e la loro deviazione standard è Δa .

Formula (approssimata) per la deviazione standard di un prodotto di due grandezze (che assumiamo positive e statisticamente indipendenti tra loro):

$$\Delta(a \cdot b) \approx ab \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

e per il loro rapporto:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}.$$

Nota: ai fini dell'esame scritto, si può utilizzare indifferentemente l'interpretazione 1) o quella 2) della notazione $a \pm \Delta a$, e usare indifferentemente l'una o l'altra corrispondente formula per l'errore su un prodotto. Stessa cosa vale per la formula dell'errore sul rapporto.

- La *media pesata* delle quantità $X_1, \dots, X_n$ secondo i pesi $m_1, \dots, m_n$ è data per definizione da

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

- Saper risolvere certi semplici problemi concreti che coinvolgono medie pesate e concetti simili, come quelli visti a lezione e a tutorato. Per esempio, è utile ricordarsi che se si devono determinare quantità incognite A_i la cui somma è assegnata e uguale ad A in modo tale che tali quantità stiano in proporzione tra loro come certe altre quantità m_i , vale a dire:

$$\begin{cases} \sum_i A_i = A & (\text{la somma dà } A) \\ \frac{A_i}{A_j} = \frac{m_i}{m_j} & (\text{per ogni } i \text{ e } j, A_i \text{ sta a } A_j \text{ come } m_i \text{ sta ad } m_j) \end{cases}$$

allora la soluzione è: $A_i = \frac{m_i \cdot A}{\sum_i m_i}$.

In questo caso, la prima uguaglianza corrisponde al fatto che, se si fa la media pesata di tante quantità tutte uguali ad A , ovviamente si riottiene la stessa quantità:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i \cdot A)}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Logica

- Sapere il significato di connettivi logici e quantificatori.
- Saper scrivere la tavola di verità di una formula proposizionale, e saper dire quando due formule sono logicamente equivalenti. Ricordarsi che $a \rightarrow b$ è logicamente equivalente a $\neg a \vee b$.
- Sapere che cos'è una tautologia e una contraddizione.
- Ricordarsi che un'implicazione $a \rightarrow b$ è sempre equivalente alla sua *controinversa* $\neg b \rightarrow \neg a$.
- Saper riconoscere nella pratica una dimostrazione per assurdo, e saper effettuare ragionamenti per assurdo.

Insiemi, relazioni, e funzioni

- Elementi $x \in A$, principio di estensionalità (due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi). Insieme vuoto $\emptyset$, insieme universo $\mathcal{U}$.
- Notazione estensiva $A = \{a, b, c, d, \dots\}$, e intensiva $A = \{x \in U \mid \varphi(x)\}$ per una certa proprietà (cioè predicato) $\varphi(x)$.
- Sottoinsiemi, inclusione insiemistica larga $A \subseteq B$ e stretta $A \subset B$.
- Insieme delle parti $\wp(A)$ (anche denotato 2^A).
- Intersezione $A \cap B$ e unione $A \cup B$. Insiemi disgiunti $A \cap B = \emptyset$. Differenza insiemistica $A \setminus B$, differenza simmetrica $A \Delta B$, complemento insiemistico A^c .
- Proprietà elementari delle operazioni insiemistiche:
 1. transitività dell'inclusione: $A \subseteq B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$,
 2. idempotenza: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$,
 3. assorbimento: $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$,
 4. distributività: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 5. associatività: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
 6. De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
 7. $\emptyset^c = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^c = \emptyset$; $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A^c \cup B^c = \mathcal{U}$.
- Prodotto cartesiano $A \times B$.
- Definizione intuitiva di relazione. Grafico di una relazione.

- Definizione intuitiva di relazione di equivalenza e classi d'equivalenza. Partizioni di un insieme. Una relazione di equivalenza su un dato insieme A determina una partizione di A in sottoinsiemi, e viceversa.
- Definizione intuitiva di funzione: una funzione $f : A \rightarrow B$ è una «regola» che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno e un solo elemento di B denotato con $f(x)$.
- Dominio $\text{dom}(f)$, codominio $\text{cod}(f)$, grafico $\Gamma_f \subseteq A \times B$.
- Immagine $\text{Im}(f)$, immagine $f(A')$ di un sottoinsieme $A' \subseteq A$.
- Funzione definita «a tratti»: se si ha una partizione $A = A_1 \cup A_2$ in insiemi disgiunti e due funzioni $f_1 : A_1 \rightarrow B$ e $f_2 : A_2 \rightarrow B$, si può definire una funzione $f : A \rightarrow B$ tramite

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in A_1 \\ f_2(x) & , x \in A_2 \end{cases}$$
- Controimmagine $f^{-1}(B')$ di un sottoinsieme $B' \subseteq B$. Controimmagine $f^{-1}(y)$ di un elemento $y \in B$.
- Restrizione $f|_{A'} : A' \rightarrow B$ di una funzione $f : A \rightarrow B$ ad un sottoinsieme $A' \subseteq A$.
- Funzione iniettiva: $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$ per ogni $x_1, x_2 \in A$. Equivalentemente: $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Funzione suriettiva: per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.
- Funzione biiettiva (o biunivoca): iniettiva e suriettiva.
- Composizione $g \circ f : A \rightarrow C$ di funzioni $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Funzione identità $\text{id}_A : A \rightarrow A$. Funzione invertibile e funzione inversa. Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva (non serve sapere le dimostrazioni).

Le definizioni e proprietà qui sopra sono facili se i concetti sono stati capiti. Potrebbero diventare molto difficili da imparare a memoria se si insiste nella memorizzazione meccanica senza comprensione.

Calcolo combinatorio ed elementi di matematica discreta

- Numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$, reali $\mathbb{R}$.
- Principio di inclusione-esclusione per tre insiemi finiti A_1, A_2, A_3 :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

dove $|X|$ denota la cardinalità (cioè il numero di elementi) dell'insieme finito X .

- $|\wp(A)| = 2^{|A|}$ per ogni insieme finito A .
- Disposizioni con ripetizione di n oggetti presi k volte (o di lunghezza k). Il loro numero è $D_{n,k}^* = n^k$.
- Disposizioni senza ripetizione di n oggetti presi k volte (o di lunghezza k). Il loro numero è $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.
- Permutazioni di n oggetti. Il loro numero è $P_n = n!$ (« n fattoriale»).
- Combinazioni di lunghezza k di n elementi: sottoinsiemi che hanno esattamente k elementi dell'insieme $\{1, \dots, n\}$. Il loro numero $C_{n,k}$ è dato dai coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- Formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k$$

- Conoscere la terminologia basilare riguardante i polinomi: variabile, monomio, polinomio, grado, somma e prodotto di polinomi. Insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nella variabile x , a coefficienti in $\mathbb{R}$ (e notazioni simili).
- Divisibilità tra polinomi: dati $D, P \in \mathbb{R}[x]$, si dice che D è un *divisore* di P se esiste un polinomio $Q \in \mathbb{R}[x]$ tale che $P(x) = Q(x) \cdot D(x)$. Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ si dice una *radice* del polinomio $P(x)$ se $P(\alpha) = 0$.
- Teorema (Ruffini): Dati $P \in \mathbb{R}[x]$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che α è una radice di $P(x)$ se e solo se $(x - \alpha)$ è un divisore di $P(x)$.
- Non tutti i polinomi reali hanno radici reali: vedi per es. $x^2 + 1$.
- Sapere che cos'è e saper effettuare la divisione (con resto) tra polinomi.
- Saper fattorizzare un polinomio (quando possibile).

Numeri reali, equazioni, e disequazioni

- Sapere e saper usare (ripeto: sapere e saper usare) la definizione della funzione valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

e sapere che, per $\epsilon > 0$, $|x - x_0| < \epsilon$ è equivalente a $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.

- L'ordine dei numeri reali è *denso*, cioè per ogni coppia di numeri reali a, b con $a < b$, esiste un numero reale c tale che $a < c < b$. Per esempio basta prendere $c = (a + b)/2$.
- I numeri razionali sono densi nei numeri reali, cioè per ogni coppia di numeri reali a, b con $a < b$, esiste un numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $a < c < b$. Equivalentemente, per ogni x reale e per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $c \in \mathbb{Q}$ tale che $x - \epsilon < c < x + \epsilon$ (cioè $|x - c| < \epsilon$).
- Conoscere le notazioni standard per gli intervalli, per esempio $[a, b)$, oppure $(-\infty, b]$, eccetera.
- Alcune operazioni ammissibili sulle equazioni. Siano A, B, C espressioni reali (per esempio numeri reali, oppure funzioni di una o più variabili e a valori reali):
 1. Da $A = B$ si può dedurre $A + C = B + C$, e *viceversa*.
 2. Da $A = B$ si può dedurre $A \cdot C = B \cdot C$.
Da $A \cdot C = B \cdot C$ si può dedurre $A = B$ ogniqualvolta $C \neq 0$.
 3. Se f è una qualunque funzione a valori reali, e A, B stanno nel suo dominio, allora da $A = B$ si può dedurre $f(A) = f(B)$.
Se f è *iniettiva*, allora da $f(A) = f(B)$ si può dedurre $A = B$.
- Sapere la definizione di funzione monotona: crescente (largamente/strettamente), decrescente (largamente/strettamente).
- Una funzione strettamente monotona è iniettiva.
- Alcune operazioni ammissibili sulle *diseguazioni*. Siano A, B, C espressioni reali (per esempio numeri reali, oppure funzioni di una o più variabili e a valori reali):
 1. $A < B \Leftrightarrow A + C < B + C$
 $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$
 2. Quando $C > 0$, $A < B \Leftrightarrow AC < BC$
Quando $C \geq 0$, $A < B \Rightarrow AC \leq BC$
Quando $C < 0$, $A < B \Leftrightarrow AC > BC$
Quando $C \leq 0$, $A < B \Rightarrow AC \geq BC$

Quando $C > 0$, $A \leq B \Leftrightarrow AC \leq BC$
Quando $C \geq 0$, $A \leq B \Rightarrow AC \leq BC$
Quando $C < 0$, $A \leq B \Leftrightarrow AC \geq BC$
Quando $C \leq 0$, $A \leq B \Rightarrow AC \geq BC$.

3. Se f è una funzione monotona strettamente crescente, e A, B sono elementi del suo dominio, allora $A < B \Leftrightarrow f(A) < f(B)$. Valgono relazioni analoghe per f strettamente decrescente, e per f largamente crescente/decrescente.

Nota: non ha senso imparare queste cose a memoria; se si è in dubbio, si fa un piccolo ragionamento e si ricava la regola corretta.

- Saper risolvere equazioni e disequazioni che coinvolgono valori assoluti (come per esempio quella vista a lezione: $x - ||x - 2| - 1| < 1$).
- Conoscere le proprietà basilari della funzione esponenziale e logaritmo, per esempio $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, eccetera.

Sistemi di equazioni lineari

- Sistemi di m equazioni lineari in n incognite. Sistemi lineari omogenei. Sistema lineare omogeneo associato a un dato sistema lineare. Sistemi rettangolari e quadrati.
- Come funziona in pratica il metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare.
- Matrice $m \times n$ (si dice anche di ordini (m, n) o terminologia analoga). Matrice quadrata di ordine n . Notazione matriciale ("vettore colonna" o "matrice colonna")

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

per indicare la n -upla ordinata $X = (x_1, \dots, x_n)$ (ovvero l'elemento $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

- Somma $A+B$ di matrici $m \times n$, moltiplicazione λA di una matrice A per uno scalare λ (cioè per un numero reale). Prodotto riga per colonna di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times r$ (il risultato è una matrice $m \times r$). Alcune proprietà delle operazioni di somma e prodotto di matrici: per esempio si ha $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ dove A è una matrice $m \times n$ e B, C sono matrici $n \times r$; inoltre il prodotto è associativo $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ dove A, B, C sono matrici di ordini opportuno.
- Scrittura di un sistema lineare in forma matriciale $A \cdot X = b$ con

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(nota: se si scrive $A \cdot X = 0$ si intende che il secondo membro è un vettore colonna b con componenti tutte uguali a zero).

- Matrice di un sistema lineare omogeneo. Matrice completa $[A \mid b]$ (ottenuta affiancando A e b) di un sistema lineare (qualunque) $A \cdot X = b$ e matrice A del sistema omogeneo $A \cdot X = 0$ associato.
- Principio di sovrapposizione: se X_1 ed X_2 sono soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A \cdot X = 0$, ed a, b sono numeri reali, allora anche la combinazione lineare $aX_1 + bX_2$ è una soluzione dello stesso sistema omogeneo $A \cdot X = 0$.
- Il determinante $\det A$ di una matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

è dato da:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \quad .$$

- Determinante di una matrice quadrata, definito tramite sviluppo rispetto a una qualsiasi riga o colonna (il risultato non dipende dalla riga o colonna scelta per calcolarlo). Notare che il caso di una matrice 2×2 del punto precedente rientra in questa definizione.
- **Criterio del determinante:** Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e b un vettore colonna con n componenti. Allora il sistema lineare $A \cdot X = b$ ha esattamente una soluzione **se e solo se** $\det(A) \neq 0$.
Nota: se $\det A = 0$, potrebbe essere che non ci sono soluzioni oppure che la soluzione non è unica (entrambi i casi possono accadere).
- Sia A una matrice $n \times n$. Alcune proprietà del determinante:
 1. Se A' è una matrice ottenuta da A scambiando due righe tra loro (oppure scambiando due colonne tra loro), allora $\det A' = -\det A$.
 2. Se A' è una matrice ottenuta da A moltiplicando una colonna (oppure una riga) per un numero reale λ , allora $\det A' = \lambda \cdot \det A$. In particolare, se una colonna (o una riga) di A è zero, allora $\det A = 0$.
 3. Si ha $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
 4. Se A' è una matrice ottenuta da A sostituendo al posto di una riga la somma tra quella riga e un multiplo di un'altra riga, allora $\det A' = \det A$. Stessa cosa vale per le colonne.
- Data una matrice $m \times n$, un suo *minore* M è una qualunque sottomatrice quadrata (per sottomatrice si intende una matrice ottenuta cancellando alcune righe e poi alcune colonne dalla matrice di partenza).
- Il *rango* $\text{rg}(A)$ di una matrice $m \times n$ A è l'ordine massimo che può avere un minore M di A tale che $\det M \neq 0$.

- **Teorema (Rouché-Capelli):** Sia A una matrice $m \times n$ e b una matrice $m \times 1$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:
 1. Il sistema lineare $A \cdot X = b$ ha almeno una soluzione.
 2. $\text{rg}([A \mid b]) = \text{rg}(A)$.
 Cioè: il sistema lineare $A \cdot X = b$ ha almeno una soluzione **se e solo se** il rango della matrice completa del sistema è uguale al rango della matrice del sistema omogeneo associato.
- Saper risolvere esplicitamente un sistema lineare quando venga data un'opportuna informazione sul rango di A e/o di $[A \mid b]$, come negli esempi visti in classe.

Geometria nel piano cartesiano

- Interpretazione di un'equazione $F(x, y) = 0$ in due variabili come sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

- Dati due sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ed $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ individuati rispettivamente dalle equazioni $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 0$, si ha che i punti dell'intersezione $X \cap Y$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

mentre l'insieme unione $X \cup Y$ è individuato dall'equazione $F(x, y) \cdot G(x, y) = 0$.

- Il grafico Γ_f di una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, come sottoinsieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} .$$

- Sapere la definizione geometrica di seno e coseno, cioè la seguente. Data una circonferenza C di raggio unitario centrata nell'origine del piano cartesiano, che quindi interseca il semiasse positivo delle x nel punto $P = (1, 0)$, e un punto X su C tale che la lunghezza dell'arco $\widehat{PX}$ sia uguale a $\theta \in [0, 2\pi)$ unità (e quindi l'ampiezza dell'angolo $\widehat{POX}$ sia pari a θ radianti), il punto X ha per definizione coordinate

$$X = (\cos \theta, \sin \theta) \quad .$$

Le funzioni $\cos \theta$ e $\sin \theta$ si estendono per periodicità a tutti i valori di $\theta \in \mathbb{R}$, dando luogo a funzioni periodiche

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

di periodo 2π .

Sapere le proprietà elementari delle funzioni seno e coseno (per esempio che hanno immagine $[0, 1]$, i valori che assumono negli angoli notevoli $0, \pi/2, \pi/3, \pi, 2\pi$, eccetera). Non è richiesta la conoscenza di identità trigonometriche (come formule di addizione per gli angoli, prostaferesi, espressione in termini della funzione tangente, eccetera).

E' tuttavia importante ricordarsi che seno e coseno verificano la seguente identità:

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \quad .$$

- Definizione della funzione "tangente": $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, definita per ogni $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Equazione della retta nel piano che passa per i punti $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

- Nel caso P e Q non abbiano la stessa ascissa, diventa:

$$y = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} (x - x_0) + y_0 \quad .$$

- Il coefficiente angolare di una retta (non verticale) è la tangente $\tan \theta$ dell'angolo (orientato) θ che essa forma con l'asse x . Se la retta è orizzontale (parallela all'asse x), il coefficiente angolare è zero.

Il coefficiente angolare m della retta per i punti $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ è dato da

$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \quad .$$

- Equazione della retta (non verticale) passante per $P = (x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m :

$$y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \quad .$$

- Il numero q si dice intercetta di una retta (non verticale) con l'asse y se tale retta interseca l'asse y nel punto $(0, q)$. Equazione della retta (non verticale) di coefficiente angolare m ed intercetta (con l'asse y) uguale a q :

$$y = mx + q \quad .$$

- Equazioni delle rette verticali e quelle orizzontali (parallele agli assi cartesiani).

- Data una retta (non verticale) di coefficiente angolare m , una qualunque retta ad essa ortogonale ha coefficiente angolare $m' = -1/m$.

La retta $y = m(x - x_0) + y_0$ passa per (x_0, y_0) e ha coefficiente angolare m . La retta passante per (x_0, y_0) ed ortogonale alla precedente ha quindi equazione

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + y_0 \quad .$$

- Il semipiano dei punti che giacciono "sopra" (rispetto all'orientamento usuale dell'asse y) alla retta non verticale di equazione $y = mx + q$ è rappresentato dalla disequazione $y \geq mx + q$. L'analogo semipiano che sta "sotto" alla stessa retta è invece rappresentato dalla disequazione $y \leq mx + q$.
- Definizione metrica di ellisse, circonferenza, e iperbole.
- Equazione dell'ellisse simmetrica rispetto agli assi cartesiani con semiassi a e b (cioè interseca gli assi nei punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad .$$

- Equazione dell'iperbole simmetrica rispetto agli assi cartesiani che interseca l'asse x nei punti $(\pm a, 0)$ e ha asintoti di equazione $y = \pm(b/a)x$:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad .$$

- Equazione dell'iperbole simmetrica rispetto agli assi cartesiani che interseca l'asse y nei punti $(0, \pm b)$ e ha asintoti di equazione $y = \pm(b/a)x$:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 \quad .$$

- Una trasformazione del piano cartesiano è una funzione biettiva $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può denotare come vettore colonna $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Una matrice 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $\det A = ad - bc \neq 0$ individua una trasformazione del piano tramite

$$F_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X \mapsto A \cdot X$$

ovvero

$$F_A(X) = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad .$$

Trasformazioni del piano individuate in questo modo da una matrice 2×2 si dicono *lineari*.

- Se A e B sono matrici con determinante non nullo, le trasformazioni del piano corrispondenti si compongono in questo modo:

$$F_B \circ F_A = F_{B \cdot A}$$

dove $B \cdot A$ denota il prodotto di matrici. Quindi comporre trasformazioni lineari è la stessa cosa che moltiplicare matrici.

- Un vettore colonna $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ individua una trasformazione (non lineare nel senso del punto precedente) del piano data da:

$$\begin{aligned} T_v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto X + v \end{aligned}$$

che è una *traslazione*. Le sue componenti sono date da:

$$T_v(X) = \begin{bmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{bmatrix} .$$

- La riflessione (o "simmetria assiale") rispetto all'asse y è una trasformazione lineare del piano, ed è codificata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

- La riflessione (o "simmetria assiale") rispetto all'asse x è una trasformazione lineare del piano, ed è codificata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

- La rotazione di angolo θ in senso *antiorario* è una trasformazione lineare del piano ed è data dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

- Se $\text{dist}(P, Q)$ denota la distanza tra due punti P, Q nel piano, una *isometria* è per definizione una trasformazione F del piano che conserva la distanza tra i punti, cioè per ogni coppia P, Q di punti del piano si ha

$$\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(F(P), F(Q)) .$$

- Una qualunque isometria si può ottenere componendo (nel senso usuale della composizione di funzioni insiemistiche) traslazioni, rotazioni e riflessioni in un ordine opportuno. A lezione non è stato visto in dettaglio in che modo ciò si possa fare; basta sapere che si può fare.

Successioni e processi discreti

- Definizione intuitiva di successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ come sequenza ordinata e infinita

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

di elementi di qualche insieme (di solito un insieme numerico).

- Successioni in forma chiusa (o esplicita). Esempi: $a_n = n!$, $a_n = \lambda n + C$, $a_n = C \cdot \rho^n$.
- Successioni in forma ricorsiva. Una *ricorsione* è un'equazione che coinvolge i termini di una successione (a_n) nel modo seguente: per ogni n , a partire da un certo indice di partenza k , il termine “successivo” a_{n+1} è espresso in funzione di tutti o parte dei termini precedenti $a_n, a_{n-1}, \dots$, ed eventualmente anche di n stesso. Una successione i cui termini, a partire dal k -esimo, soddisfano l'equazione suddetta, si dice che soddisfa o verifica la ricorsione (o anche che è una soluzione della ricorsione in questione).

Per esempio, la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ che comincia con

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

soddisfa la seguente ricorsione:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

In questo caso, l'indice da cui si parte è 2, e *non* si ha dipendenza esplicita da n .

Altro esempio: la successione che comincia con

$$0, 1, 2, 5, 10, \dots$$

soddisfa la ricorsione

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + n, \quad n \geq 2.$$

l'indice di partenza della ricorsione è 2, e in questo caso si ha dipendenza da n (nel senso che il termine “successivo” a_{n+1} dipende da alcuni termini precedenti ed esplicitamente anche da n stesso).

- Una ricorsione si dice di ordine k se esprime a_{n+1} come funzione dei k termini immediatamente precedenti (per ogni n a partire da k incluso) ed eventualmente anche da n . Per esempio, la ricorsione

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} - 3a_{n-2} + (a_{n-3})^2 + 2n^2, \quad n \geq 4$$

è una ricorsione di ordine 4 perché esprime a_{n+1} come funzione dei quattro termini precedenti $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ e di n .

- o Una ricorsione di ordine k si dice autonoma se non c'è dipendenza esplicita da n (nel senso accennato sopra negli esempi). Per esempio, questa è una ricorsione autonoma di ordine 4:

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} - 3a_{n-2} + (a_{n-3})^2, \quad n \geq 4$$

- o Una ricorsione di ordine k si dice *lineare omogenea* se esprime a_{n+1} come somma dei k termini precedenti ciascuno moltiplicato per un coefficiente costante assegnato.

Esempio di ricorsione lineare omogenea di ordine 5:

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 7a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4}, \quad n \geq 5.$$

Un esempio famoso di ricorsione lineare omogenea di ordine 2 è la cosiddetta ricorsione di Fibonacci

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

che è soddisfatta, per esempio, dalla successione dei numeri di Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

che comincia con $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ ed ogni termine è la somma dei due termini precedenti.

E' importante notare che i numeri di Fibonacci classici (cioè $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$) *non* sono l'unica soluzione della ricorsione di Fibonacci. Per esempio, la successione che comincia con

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

è un'altra soluzione della ricorsione $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (sempre per $n \geq 2$), che però comincia con i termini iniziali $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

- o Data una ricorsione di ordine k , se si assegnano i primi k termini $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$, si dice che si assegnano le condizioni iniziali (o i dati iniziali) della ricorsione. Una ricorsione di ordine k con condizioni iniziali assegnate ha la forma

$$\begin{cases} a_{n+1} = (\text{funzione di } a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1} \text{ e di } n), & n \geq k \\ a_0 = C_0 \\ \vdots \\ a_{k-1} = C_{k-1} \end{cases}$$

- o **Teorema di ricorsione:** Data una ricorsione di ordine k con condizioni iniziali assegnate, esiste una e una sola successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che la soddisfa.

Esempio: consideriamo la ricorsione di Fibonacci di ordine 2 con condizioni iniziali $a_0 = 32$, $a_1 = -7$, cioè

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} , & n \geq 2 \\ a_0 = 32 \\ a_1 = -7 \end{cases}$$

Il teorema di ricorsione ci assicura che esiste un'unica successione infinita (a_n) che soddisfa tale ricorsione e ha le condizioni iniziali assegnate. E' facile verificare che i primi valori di questa successione sono:

$$32, -7, 25, 18, 43, 61, \dots$$

- Successione (o progressione) aritmetica. La successione aritmetica di passo λ e valore iniziale C è data da una ricorsione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \lambda \\ a_0 = C \end{cases}$$

che esprime il fatto che la differenza $a_{n+1} - a_n$ tra ogni termine e quello precedente è uguale a una costante λ assegnata, e il termine iniziale a_0 è uguale a una costante C assegnata (cioè le condizioni iniziali della ricorsione sono: $a_0 = C$. Il numero λ non è una condizione iniziale, ma semplicemente un parametro).

L'espressione in forma chiusa è $a_n = \lambda \cdot n + C$.

- Successione (o progressione) geometrica. La successione geometrica di ragione ρ e valore iniziale C è data da una ricorsione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \rho \cdot a_n \\ a_0 = C \end{cases}$$

che esprime il fatto che il rapporto a_{n+1}/a_n tra ogni termine e quello precedente è uguale a una costante ρ assegnata, e il termine iniziale a_0 è uguale a una costante C assegnata (cioè le condizioni iniziali della ricorsione sono: $a_0 = C$. Il numero ρ non è una condizione iniziale, ma semplicemente un parametro).

L'espressione in forma chiusa è $a_n = C \cdot \rho^n$.

- Definizione intuitiva di limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Calcolo di alcuni limiti di successioni, come per esempio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{5n+7} = \frac{3}{5}.$$

Il calcolo di tali limiti per lo più non si basa su tecniche diverse da quelle per il calcolo di limiti di funzioni (vedi paragrafi più sotto) $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$. Va ricordato che il fattoriale $n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto all'esponenziale, vale a dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

- La definizione del numero di Nepero, o base del logaritmo naturale:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e quindi della funzione esponenziale

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Funzioni di una variabile reale, limiti, e continuità

(In questo paragrafo e nei successivi potrò lasciare sottointese alcune ipotesi aggiuntive su esistenza dei limiti e domini delle funzioni coinvolte ecc., nei casi in cui tali ipotesi siano facilmente indovinabili da chi legge).

- Sapere come i grafici delle funzioni $f(x-a)$, $f(c \cdot x)$, $f(x-a)+b$, $\lambda \cdot f(x)$, $f(-x)$, $-f(x)$ sono collegati al grafico della funzione $f(x)$.
- Aver presente come sono fatti i grafici delle funzioni x^α , e^x , $\log x$ (coi loro domini standard).
- Sapere il significato intuitivo della notazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

dove

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure x_0 è uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞
2. $L \in \mathbb{R}$ oppure L è uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Sapere le varianti della notazione con x_0^+ ed x_0^- , e con L^+ ed L^- .

- Sapere che non sempre i limiti esistono, per esempio $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Sapere i limiti, quando definiti, al finito e all'infinito delle funzioni x^α , e^x , $\log x$ (considerate con i loro domini standard).

- Sapere i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

- Proprietà dei limiti:

1. Unicità del limite (quando esiste).
2. Permanenza del segno: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$ allora esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$ su $I \setminus \{x_0\}$.
3. Monotonia del limite: se $f(x) \leq g(x)$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
4. Criterio del confronto: se $g(x) \leq f(x) \leq G(x)$ per ogni $x \neq x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = L$, allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
5. Usuali fatti sui limiti e le operazioni algebriche $+$, $\times$, ecc.

- Teorema di collegamento tra i limiti di funzioni e i limiti di successioni: le seguenti condizioni sono equivalenti

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
2. Per *ogni* successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.

- Teorema di cambiamento di variabile nei limiti (non specifico i domini delle funzioni): se si ha

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$$

allora si ha $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = L$.

Non è necessario sapere a memoria il teorema, ma saperlo applicare in concreto nei casi in cui sia utile. In altre parole, saper calcolare (quando possibile) i limiti col metodo di cambiamento di variabile, come negli esempi visti a lezione.

- Sapere cosa significa che una funzione $f(x)$ è un infinito (rispett. un infinitesimo) di ordine inferiore rispetto $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e la notazione che abbiamo usato per indicarlo: $f(x) \prec g(x)$, $x \rightarrow x_0$.
- $\log x \prec x^\alpha \prec x^\beta \prec e^x$ per $x \rightarrow +\infty$ (dove $0 < \alpha < \beta$).
- Principio di sostituzione degli infiniti (o degli infinitesimi): se $f(x) \prec F(x)$ e $g(x) \prec G(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

se i limiti in questione esistono. Questa non è altro che la versione generale del solito trucco di raccogliere il termine più "potente" a numeratore e a denominatore.

- Sapere la definizione di asintoto orizzontale (destro e/o sinistro), e asintoto obliquo (destro e/o sinistro), e sapere come verificare se c'è un tale asintoto. Per esempio, la funzione $f(x)$ ha la retta $y = mx + q$ come asintoto obliquo destro se e solo se si hanno entrambe le seguenti condizioni:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$.
2. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$.

- Sapere la definizione intuitiva di continuità, e la definizione rigorosa:

$$f \text{ continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

- Le funzioni continue si “scambiano coi limiti”, cioè: se la funzione $f(x)$ è continua allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x))$. Questo fatto, che nella prova scritta si può dare per scontato, è usato sostanzialmente per giustificare certi passaggi apparentemente “ovvi” nel calcolo dei limiti. E' anche usato per provare che la composizione di funzioni continue è continua.
- Le funzioni elementari usuali (cioè x^n (n intero), x^α (α reale, definita per $x \geq 0$), e^x , $\log x$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, e le costanti), e tutte le loro combinazioni (ottenute tramite operazioni algebriche e composizione di funzioni) sono continue *sul dominio naturale su cui sono definite*.
- Per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è una funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuta prendendo il reciproco della funzione elementare x . La funzione $f(x) = 1/x$ è continua (cioè è continua in tutti i punti del proprio dominio). Ciò non esclude che in un punto dell'asse reale “al bordo” del dominio ma che non appartiene al dominio, cioè in $x = 0$, questa funzione tenda all'infinito: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$. Per convenzione, $x = 0$ viene comunque considerato un asintoto verticale per $1/x$. Di fatto (siccome, come abbiamo detto, le combinazioni di funzioni elementari sono sempre continue sul loro dominio naturale) gli asintoti verticali di una funzione $f(x)$ che sia combinazione di funzioni elementari potrà avere un asintoto verticale solo in punti di bordo (“estremi”) del dominio che non appartengono al dominio. Altro esempio: la funzione $f(x) = 1/\log(x - 2)$ è continua su tutto il suo dominio naturale (che è $(2, 3) \cup (3, +\infty)$) ha un asintoto verticale in $x = 3$.
- Sia f una funzione definita su un intervallo, continua e invertibile. Allora la sua inversa è una funzione continua.
- **Teorema degli zeri:** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)$ ed $f(b)$ sono diversi da zero e hanno segno opposto, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
- **Teorema dei valori intermedi:** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(x)$ assume tutti i valori reali tra $f(a)$ ed $f(b)$.

- Sapere la definizione di massimo e minimo assoluto e relativo.
- **Teorema di Weierstrass:** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto su $[a, b]$.
Osservazione: tale punto di massimo (o minimo) non è necessariamente unico.

La derivata

- Sapere il significato geometrico intuitivo di derivata: la derivata $f'(x_0)$ di $f(x)$ nel punto x_0 è il coefficiente angolare della tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. In altre parole, tale retta tangente ha equazione

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) .$$

- Sapere la definizione di derivata in un punto come limite del rapporto incrementale

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} .$$

e chiarirsi le idee sul fatto che questo significa geometricamente che $f'(x_0)$ è il limite del coefficiente angolare della retta secante al grafico che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ ed $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Tuttavia non verrà mai chiesto di calcolare una derivata utilizzando direttamente la definizione come limite del rapporto incrementale.

- Derivabilità. Funzione derivata $f'(x)$. A volte la derivata si denota con $Df(x)$.
- Sapere che la derivata $f'(x_0)$ rappresenta la velocità istantanea di variazione della grandezza f rispetto alla grandezza x quando x assume il valore x_0 . Per esempio, se $s(t)$ è la posizione di un vagone lungo un binario unidimensionale al tempo t , la derivata $s'(t_0)$ nel punto $t = t_0$ rappresenta la velocità istantanea di tale vagone all'istante $t = t_0$. Se $v(t)$ denota la velocità del vagone all'istante t , allora la derivata $v'(t_0)$ rappresenta l'accelerazione istantanea del vagone nell'istante $t = t_0$ (in questo caso, notiamo che v' è la derivata della derivata di s , detta anche derivata seconda s'' di s rispetto alla variabile t).
- Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 . Il viceversa non è sempre vero, come testimonia la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$, che è continua ma non derivabile in $x = 0$.
- Sapere la seguente tabella di derivate di alcune funzioni elementari:

$f(x)$	$f'(x)$
costante	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

(Nella tabella il dominio delle funzioni viene lasciato sottointeso).

- Sapere le seguenti regole di derivazione (le funzioni f e g si assumono definite e derivabili su opportuni domini):

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c costante
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $(g \circ f)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dove $\circ$ denota la composizione di funzioni.

- Saper usare la tabella precedente e le regole di derivazione qui sopra per calcolare la derivata di qualsiasi combinazione di funzioni elementari. Per esempio, $D(e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot 2x$.

- **Teorema (Criterio di crescenza):** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile sull'intervallo aperto (a, b) . Allora valgono le seguenti implicazioni

1. Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è costante su $[a, b]$.
2. Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente su $[a, b]$.
3. Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente decrescente su $[a, b]$.

Il teorema si può applicare anche quando si prenda $-\infty$ al posto di a e/o $+\infty$ al posto di b (in tal caso, nel teorema l'intervallo "chiuso" $[-\infty, b]$ va letto per definizione come $(-\infty, b)$, e idem per i casi con $+\infty$).

Notare che l'implicazione inversa non è sempre verificata nei casi 2. e 3., per esempio la funzione strettamente crescente $f(x) = x^3$, definita diciamo in $[-1, 1]$, ha derivata $f'(x) = 3x^2$ che si annulla in $x = 0$ (quindi in questo caso non è vero che $f'(x) > 0$ per ogni x nell'intervallo $(-1, 1)$).

Inoltre, è estremamente importante l'ipotesi che f sia definita su un *intervallo*: infatti, per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ ha derivata $f'(x) = -1/x^2$ strettamente negativa su tutto il suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tuttavia *non* è una funzione decrescente (neanche in senso largo) sul suo dominio perché per esempio $f(-1) = 1/(-1) = -1 < +1 = f(+1)$. Su ciascun sottointervallo del dominio, invece, per il teorema $f(x) = 1/x$ è strettamente decrescente. Per esempio su $(-\infty, 0)$, oppure su $(0, +\infty)$.

- **Teorema (Criterio per massimi e minimi relativi):** Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita e continua sull'intervallo I , e derivabile sull'insieme $I \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in I$ è un certo punto. Allora si hanno le seguenti implicazioni:
 1. Se $f'(x) > 0$ per ogni $x < x_0$ in I , ed $f'(x) < 0$ per ogni $x > x_0$, allora $x = x_0$ è un punto di massimo relativo per f su I .
 2. Se $f'(x) < 0$ per ogni $x < x_0$ in I , ed $f'(x) > 0$ per ogni $x > x_0$, allora $x = x_0$ è un punto di minimo relativo per f su I .
- I due criteri sopra indicati permettono di fare uno studio della crescita di una funzione f (cioè determinare dove f è crescente e dove è decrescente) e dei suoi massimi e minimi relativi, nel caso in cui f sia derivabile ovunque oppure al di fuori di un insieme finito di punti. Si suddivide il dominio di f in intervalli aperti su cui la derivata è $\neq 0$ e ha segno costante. Su ciascuno di tali intervalli la (de)crescita di f è determinata. Per sapere cosa succede su un punto x_0 che è estremo comune di due di tali intervalli adiacenti, se f è continua in x_0 si può applicare il criterio per i massimi e minimi relativi.

Esempio: consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. Tale funzione risulta continua su $\mathbb{R}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La derivata è $f'(x) = 1/(2 \cdot \sqrt{x})$ per $x > 0$ ed è $f'(x) = -1/(2 \cdot \sqrt{-x})$ per $x < 0$. Quindi $f'(x) < 0$ per $x < 0$ ed $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Applicando il criterio per massimi e minimi relativi all'intervallo (illimitato) $I = (-\infty, +\infty)$ con $x_0 = 0$, si ottiene che $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f (il fatto che f non sia derivabile in tale punto non ha importanza). Il criterio di crescita applicato agli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$ ci dice anche che f è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente su $[0, +\infty)$. Questo ci permette di concludere che $x = 0$ è anche un punto di minimo assoluto per f , e che non ci sono altri estremi relativi o assoluti.

Ai fini della prova scritta, non viene richiesto di dare tutte queste giustificazioni teoriche come nell'esempio qui sopra. Però (per rimanere su questo esempio) se si lascia intendere che si crede che $\sqrt{|x|}$ sia derivabile in 0, oppure se ci si mette a cercare gli estremi relativi *solo* tra i punti in cui $f'(x) = 0$ (in questo caso non ce ne sono nemmeno...), allora queste cose vengono ovviamente valutate come errori.

Integrali

- Sia data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ discontinua al più su un insieme finito di punti. Una funzione come questa è *integrabile* (in realtà è una definizione molto restrittiva di integrabilità, ma nel corso non ne vengono considerate altre).
- Sapere l'interpretazione geometrica dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

di una funzione integrabile f come area del sottografico di f tra gli estremi a e b . Ricordarsi che l'integrale dove f è positiva conta l'area come positiva, e dove f è negativa conta l'area come negativa. Quindi l'integrale è una misura di area "orientata", non "geometrica".

Osservazione: l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è un numero reale, *non* una funzione di x . Di fatto, nella notazione $\int_a^b f(x)dx$ la lettera x non denota una variabile libera, quindi se si cambia il suo nome nella notazione non cambia nulla:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

un po' come succede nella notazione per le somme: $\sum_i a_i$ è da intendersi come la stessa identica cosa di $\sum_k a_k$ e di $\sum_n a_n$, e così via.

- L'area (da qui in poi sempre considerata "orientata") del sottografico di f , e quindi l'integrale definito, può essere approssimata da rettangolini verticali con base sempre più piccola e altezza che dipende da $f(x)$ in vari punti x . Una delle varie definizioni equivalenti di integrale per una f come sopra è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

dove l'intervallo $[a, b]$ viene suddiviso in tanti intervallini $[x_i, x_{i+1}]$ di ampiezza Δx_i , e l'ampiezza massima di tali intervallini viene fatta tendere a zero mentre contemporaneamente il loro numero viene fatto tendere all'infinito. (Il "lim" che figura nella definizione qui sopra non rientra nel concetto di limite di funzione di variabile reale che abbiamo visto a lezione, ma è un concetto più generale di limite di cui non ci occupiamo).

- Due funzioni i cui valori differiscono solo su un insieme finito di punti hanno lo stesso integrale.
- Alcune proprietà dell'integrale:
 1. Additività (sul dominio di integrazione):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

per ogni $c \in [a, b]$.

2. Linearità (nell'integranda):

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda \cdot f(x))dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx . \end{aligned}$$

3. Monotonia (nell'integranda): se $f(x) \leq g(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

- Una *primitiva* di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ su $[a, b]$ è una funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $[a, b]$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
- Sapere che se F e G sono due primitive di f su $[a, b]$, allora esiste una costante C tale che $G(x) = F(x) + C$ per ogni $x \in [a, b]$.
- La *funzione integrale* di una funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$I_f(x) := \int_a^x f(t)dt .$$

Cioè il valore della funzione integrale in $x \in [a, b]$ è l'integrale di f tra a ed x .

- **Teorema Fondamentale del Calcolo:** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **continua**. Allora

1. La funzione integrale $I_f(x)$ è una primitiva di f su $[a, b]$.
2. Se F è una qualunque primitiva di f su $[a, b]$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Questo teorema è importante perché sostanzialmente riconduce il calcolo di un integrale al trovare una primitiva dell'integranda.

A volte si introduce la notazione $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$.

- Ma come si fa a trovare una primitiva di una funzione? Alcune primitive sono deducibili immediatamente: basta leggere "al contrario" la tabella di derivate di alcune funzioni elementari:

$f(x)$	una primitiva di $f(x)$
$x^\alpha, (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}, (x > 0)$	$\log(x) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Nella tabella, C denota una costante arbitraria.

Nell'ambito del corso non abbiamo considerato primitive al di fuori di quelle che figurano nella tabella qui sopra (e quelle che si possono dedurre da esse tramite le proprietà elementari degli integrali come la linearità). Ai fini della prova scritta non è necessario conoscere altre tecniche di integrazione al di fuori di quelle deducibili da questa tabella, dalle proprietà elementari dell'integrale elencate più sopra, e dal teorema fondamentale del calcolo.